Lycée Bennene Bodheur ◈◇◈ A.S : 2015 / 2016	DEVOIR DE CONTROLE N 1
	Epreuve: **Mathématiques**
	Durée: 2 H Coefficient : 3
Prof: Mr MBARKI SABRI	**Section: Sciences Expérimentales**

<u>Exercice 1</u> : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte. L'élève doit indiquer sur sa copie, <u>avec justification</u>, le numéro de la question et la lettre convenable à la réponse choisie.

Une réponse correcte et justifiée vaut 0.75 point, une réponse correcte et non justifiée vaut 0.25 point et une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : f(x) = $x^2(1-\sin\frac{1}{x^2})$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$
   a) $+\infty$ b) 0 c) 1
2) 1+i est une racine quatrième de :
   a) – 4 b) 4 c) 4i
3) Si arg(z) $\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ alors arg($i\bar{z}$) $\equiv$
   a) $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ b) $-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c) $\frac{\pi}{3}[2\pi]$
4) L'équation $z^2 = (\bar{z})^2$ admet dans $\mathbb{C}$
   a) Une seule racine b) deux racines distincts c) une infinité de racines

<u>Exercice 2</u> : (6 points)

Soit la fonction f définie sur [-2, +∞[par : f(x) = x-1 + $\sqrt{x+2}$.

1) a) Montrer que f est continue sur [-2, +∞[.
   b) montrer que f est strictement croissante sur [-2, +∞[.
2) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]-1, 0[une unique solution α.
   b) Donner un encadrement de α a 10^{-2} près.
3) donner le signe de f(x) sur [-1, 0].
4) a) Montrer que : $\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$
   b) En déduire la valeur exacte de α.
5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x^2(1-\cos\frac{\pi}{x})\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}\right)$

<u>Exercice 3</u> : (7 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - (\sqrt{3} + 3i)Z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

1) a) Vérifier que : $(-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
   b) Résoudre l'équation (E)
2) Pour tout Z dans $\mathbb{C}$, on pose p(Z) = $Z^3 - (\sqrt{3} + 5i)Z^2 - 4(2 - i\sqrt{3})Z + 4(\sqrt{3} + i)$
   a) Calculer p(2i)
   b) Trouver les nombres complexes α et β tel que : pour tout Z dans $\mathbb{C}$ on a p(Z) = (Z-2i)(Z^2+ $\alpha Z + \beta$)
   c) Résoudre l'équation p(Z) = 0
3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 2i, b = $\sqrt{3} + i$ et c = $\sqrt{3} + 3i$
   a) Donner l'écriture exponentielle de a et b. En déduire la construction des points A, B et C
   b) Donner l'écriture exponentielle de c et $\frac{c-a}{b-a}$.
   c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.
4) a) Vérifier que : b = c – a
   b) en déduire que le quadrilatère OBCA est un losange.

<u>Exercice 4</u> : (4 points)

Soient Z_1 et Z_2 deux nombres complexes non nuls et non réels tels que : $Z_1 \times Z_2 = 1$ et $|Z_1 - Z_2| = 2$. Soit r le module de Z_1 et θ un argument de Z_1. On suppose que r ≥ 1 et $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1, 1, Z_1 et Z_2

1) a) Donner l'écriture exponentielle de Z_2.
   b) Montrer que : $|Z_1 - Z_2|^2 = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\cos 2\theta$
   c) Déduire que : r $- \frac{1}{r} = 2\cos\theta$
2) Calculer les distances AM_2 et BM_1.
3) Montrer que : (AM_1) // (BM_2)
4) Soit Δ une demi-droite d'origine O incluse dans le premier quadrant et M_1 un point de Δ. Déduire de ce qui précède une construction de M_2.